PENDEKATAN PEMROGRAMAN MULTIOBJEKTIF INTERAKTIF UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH ALOKASI ASET OPTIMAL DAN STUDI KASUS PADA LIMA SEKURITAS DI INDONESIA

Sutrisno[1], Dita Anies Munawwaroh[2]
[1,2]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang
[1]*tresno.math@undip.ac.id*, [1]*tresnowijoyo@gmail.com*,[2]*dita.anies.m@gmail.com*

Abstract. In this paper, we use an interactive multiobjective programming approach to solve an optimal asset allocation problem. This problem contains two objective functions which are function of expected return that will be maximized and function of risk that will be minimized. We gives a case study for this problem to find the optimal asset allocation for five securities in Indonesia. The approachmentthat was used in this paper gives the percentage of each of the given five securities that gives the optimalexpected return and the optimal risk.
Keywords : Optimal Asset Allocation Problem, Interactive multiobjective programming

1. PENDAHULUAN

Seorang investor pasti ingin mendapatkan keuntungan sebesar mungkin dengan resiko sekecil mungkin. Untuk tujuan tersebut, seorang investor sebelum menginvestasikan asetnya haruslah menghitung seberapa besar aset yang akan dialokasikan ke masing-masing sekuritas yang menjadi target investasi sedemikian sehingga diprediksi akan menghasilkan ekspektasi *return* maksimal dan resiko minimal. Untuk menentukan besarnya alokasi aset ke masing-masing masing sekuritas, masalah ini dapat dimodelkan kedalam masalah matematis dalam bentuk masalah optimisasi yang dapat disebut sebagai masalah alokasi aset optimal atau dikenal juga dengan masalah portofolio optimal. Penelitian tentang masalah alokasi aset optimal sudah berlangsung sejak tahun 50-an dimulai saat [1] memberikan analisis *Mean-Variance* untuk menentukan portofolio optimal. Ada investor yang hanya ingin memaksimalkan pendapatan tanpa memperhatikan besarnya resiko yang muncul. Pendapatan dari suatu portofolio dapat diprediksi dengan mengukur ekspektasi ekspektasi *return* yang dihitung berdasarkan performa pada masa-masa sebelumnya dari asetnya, sehingga seorang investor yang hanya ingin memaksimalkan pendapatan tanpa memperhatikan resikonya dapat memformulasikan masalah ini menjadi masalah optimisasi fungsi objektif tunggal yaitu memaksimalkan ekspektasi ekspektasi *return* dari portofolionya. Di sisi lain, ada investor yang hanya ingin meminimumkan resiko portofolio tanpa mempedulikan besarnya ekspektasi *return* yang diperoleh. Resiko portofolio dapat diukur menggunakan varian dari portofolio yang merupakan ukuran dispersi dari ekspektasi *return*, Sehingga bagi investor yang hanya ingin meminimalkan resiko saja tanpa memperhatikan besarnya ekspektasi *return* dapat memformulasikan masalah ini menjadi masalah optimisasi fungsi objektif tunggal yaitu meminimumkan resiko portofolio. Bagi investor yang ingin memaksimalkan pendapatan dengan resiko sekecil mungkin, dapat memformulasikan masalah ini menjadi masalah optimisasi dua fungsi objektif, yaitu memaksimalkan ekspektasi ekspektasi *return* dan meminimumkan resiko secara simultan sehingga masalah ini menjadi optimisasi multiobjektif. Beberapa peneliti sebelumnya sudah mengembangkan metode pemrograman multiobjektif untuk menyelesaikan masalah ini, misalnya [2] meggunakan pendekatan *goal programming* dan [3] menggunakan analisis pemrograman konvek untuk menentukan himpunan solusi Pareto. Lebih lanjut [4] mengembangkan model pemrograman multibjektif yang memuat 12 buah fungsi objektif termasuk juga *return* dan bagusnya ia memasukkan komponen *social responsibility* didalamnya. Pendekatan-pendekatan tersebut masih kurang fleksibel karena hasil optimisasi diserahkan pada alat hitung optimisasi tanpa perlakuan khusus dari *decicion maker* (DM). Referensi [5] memberikan alternatif solusi dimana DM dapat memberikan perlakuan terhadap solusi Pareto yang akan dipilih menggunakan pendekatan PSEA dan algoritma genetik dimana DM dapat mereduksi himpunan solusi Pareto sehingga lebih mudah memilihnya.

Pemrograman multiobjektif muncul karena masalah optimisasi yang akan diselesaikan memuat dua atau lebih fungsi objektif saling konflik yang harus dioptimalkan secara simultan dengan kendala-kendala tertentu. Berbagai permasalahan sudah diselesaikan menggunakan pemrograman multiobjektif selama puluhan tahun terakhir, mulai dari sintesis jaringan *bilevel heat exchanger* [6], optimalisasi proses biologi untuk memaksimumkan profit dan meminimumkan efek samping terhadap lingkungan [7], optimalisasi masalah *water treatment* [8], optimalisasi masalah *supply chain* [9], sampai dengan menjadikan pemrograman multiobjektif sebagai alat hitung pada masalah kontrol optimum [10, 11].Masalah pemrograman multiobjektif bisa saja memiliki solusi optimal yang mengoptimalkan semua fungsi objektif secara simultan, tetapi tidak selalu terdapat solusi tersebut, sehingga untuk menentukan solusinya dapat digunakan konsep keoptimalan Pareto yang solusinya disebut solusi Pareto [12]. Pada umumnya, suatu masalah pemrograman multiobjektif memiliki tak terhingga banyak solusi Pareto jika daerah fisibelnya tidak kosong. Solusi-solusi Pareto tersebut dapat disebut himpunan solusi Pareto. Karena solusi Paretonya tidak tunggal, muncul masalah baru yaitu bagaimana seorang DMmemilih diantara banyak solusi Pareto tersebut untuk digunakan sebagai solusi masalahnya. Untuk memilih salah satu solusi Pareto dari himpunan solusi Pareto, dapat digunakan metode pemrograman multiobjektif interaktif atau dikenal juga dengan metode titik referensi [13]. Metode ini mencari salah satu solusi Pareto yang memberikan nilai fungsi objektif paling dekat dengan nilai fungsi objektif yang dijadikan referensi oleh DM. Caranya adalah DM menentukan suatu titik referensi tertentu yang mencerminkan nilai fungsi objektif yang diinginkan oleh DM. Setelah titik referensi ditentukan, diselesaikan masalah minimax yang akan memberikan sebuah solusi Pareto yang terdekat dengan titik referensi [12].

Pada artikel ini, kami menggunakan pendekatan pemrograman multiobjektif interaktif untuk menyelesaikan masalah alokasi aset optimal. Metode ini akan kami gunakan untuk menentukan seberapa besar persentase alokasi aset dari masing-masing sekuritas dari sekuritas-sekuritas yang diberikan sedemikian sehingga memaksimumkan ekspektasi ekspektasi *return* dan meminimumkan resiko secara simultan. Solusinya merupakan salah satu solusi Pareto dipilih dari himpunan solusi Pareto berdasarkan titik referensi yang diberikan. Kami memberikan studi kasus untuk lima sekuritas terkenal di Indonesia. Dari kelima sekuritas tersebut dan sebuah titik referensi yang diberikan akan ditentukan persentase alokasi aset optimal untuk masing-masing sekuritas.

2. PEMBAHASAN

2.1 Masalah Alokasi Aset Optimal dan Studi Kasus untuk 5 Sekuritas di Indonesia

Penelitian pada artikel ini merupakan penelitian lanjutan dari referensi (Sutrisno dan Nia, 2013) dan data pada penelitian ini juga menggunakan data pada referensi tersebut. Diberikan lima sekuritas yaitu Bank Mandiri (Persero) TBK (BMRI), PT Unilever Indonesia TBK (UNVR), Astra Internasional TBK (ASII), PT HM Sampoerna TBK (HMSP) dan PT Indofood

Sukses Makmur TBK (INDF). Data historis dari performansi masing-masing aset tersebut yang digunakan pada penelitian ini adalah data bulan Desember 2013 sampai April 2014. Nilai ekspektasi ekspektasi *return* dan varian ekspektasi *return* untuk kelima sekuritas tersebut disajikan pada Tabel *2.1*.

Tabel 2.1. Ekspektasi Ekspektasi return dan VarianEkspektasi return Masing-masing Sekuritas

Sekuritas	Ekspektasi *return*	Varian Ekspektasi *return*
BMRI	6%	0.0394
UNVR	3%	0.0404
ASII	3%	0.0544
HMSP	2%	0.0314
INDF	0%	0.0626

Misalkan $x_i$menyatakan bobot alokasi aset untuk sekuritas ke-*i*. Misalkan pula p_i menyatakan ekspektasi *return* rata-rata untuk aset ke-*i* dan vektor $p=[p_1,p_2,p_3,p_4,p_5]'$ menyatakan ekpektasi ekspektasi *return* dari kelima aset tersebut. Sehingga fungsi objektif yang menyatakan ekspektasi ekspektasi *return* dari kelima aset dengan masing-masing bobot alokasi $x_i$adalah

$$M(x)=p'x \tag{2.1}$$

dengan $x=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]'$ dan notasi x' berarti transpose dari vektor *x*. Sedangkan resiko dari masalah alokasi aset optimal ini, diukur dengan nilai varian dari ekspektasi *return*,adalah

$$\sigma^2(x)=x'C_{ov}x \tag{2.2}$$

dengan C_{ov} adalah matriks kovarian dari ekpektasi ekspektasi *return* kelima aset tersebut.

Masalah alokasi aset optimal yang memaksimumkan ekspektasi *return* dan meminimumkan resiko secara simultan dapat diformulasikan sebagai masalah optimisasi multiobjektif

$$\left.\begin{array}{l} \max M(x)=p'x \\ \min \sigma^2(x)=x'C_{ov}x \\ \text{kendala :} \\ \quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ \quad x_i\geq 0, i=1,2,3,4,5. \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

Fungsi objektif pada masalah optimisasi (2.3) adalah fungsi linier dan kuadratik sedangkan kendalanya adalah fungsi linier.

2.2 Pemrograman Multiobjektif Interaktif untuk Masalah Alokasi Aset Optimal

Pendekatan pemrograman multiobjektif interaktif untuk menentukan alokasi aset optimal akan memberikan nilai fungsi objektif pada **Error! Reference source not found.** yang terdekat dengan suatu nilai fungsi objektif yang dijadikan titik referensi oleh DM. Pada artikel ini, kami menggunakan teoripemrograman multiobjektif interaktif pada [12] untuk memformulasikan pemrograman multiobjektif interaktif untuk menyelesaikan masalah alokasi aset optimal. Misalkan titik referensi yang diberikan oleh DM adalah $\left(\hat{M},\hat{\sigma}^2\right)$, didefinisikan masalah minimax

$$\left.\begin{array}{l} \min\max\left\{M(x)-\hat{M},\sigma^2(x)-\hat{\sigma}^2\right\} \\ \text{kendala :} \\ \quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ \quad x_i\geq 0, i=1,2,3,4,5. \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

Masalah optimisasi (2.4) merupakan salah satu bentuk khusus dari masalah optimisasi multiobjektif interaktif pada [12] dimana solusi optimalnya merupakan solusi Pareto yang terdekat dengan titik referensi pada norma L_∞ (norma Tchebyshev atau jarak Manhattan). Jaminan eksistensi solusi masalah optimisasi yang berbentuk seperti (2.4) sudah dibahas pada [12]. Dengan menggunakan variabel bantu *v*, masalah optimisasi (2.4) dapat dinyatakan secara ekuivalen sebagai

$$\left.\begin{array}{l}\min v \\ \text{kendala:} \\ \quad M(x)-\hat{M} \le v \\ \quad \sigma^2(x)-\hat{\sigma}^2 \le v \\ \quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ \quad x_i \ge 0, i=1,2,3,4,5.\end{array}\right\} \quad (2.5)$$

Karena masalah optimisasi (2.5) dapat menghasilkan solusi Pareto lemah, padahal yang ingin diperoleh adalah solusi Pareto, maka (2.5) direvisi menjadi

$$\left.\begin{array}{l}\min\limits_{x,v} v+\rho\left(M(x)-\hat{M}+\sigma^2(x)-\hat{\sigma}^2\right) \\ \text{kendala:} \\ \quad M(x)-\hat{M} \le v \\ \quad \sigma^2(x)-\hat{\sigma}^2 \le v \\ \quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ \quad x_i \ge 0, i=1,2,3,4,5.\end{array}\right\} \quad (2.6)$$

dengan ρ adalah suatu bilangan real positif yang cukup kecil. Dengan revisi tersebut, masalah optimisasi (2.6) akan menghasilkan solusi Pareto yang terdekat dengan titik referensi. Pada artikel ini, masalah optimisasi (2.6) akan diselesaikan menggunakan algoritma *active-set* dengan alat bantu hitung fungsi *fmincon* pada software MATLAB, untuk itu masalah optimisasi tersebut kami tuliskan kembali sesuai bentuk umum masalah optimisasi non-linier pada MATLAB yaitu

$$\left.\begin{array}{l}\min\limits_{x,v} v+\rho\left(M(x)-\hat{M}+\sigma^2(x)-\hat{\sigma}^2\right) \\ \text{kendala:} \\ \quad [p \quad -1]'\begin{bmatrix}x \\ v\end{bmatrix} \le \hat{M} \\ \quad [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix}x \\ v\end{bmatrix} = 1 \\ \quad \sigma^2(x)-v \le \hat{\sigma}^2 \\ \quad x_i \ge 0, i=1,2,3,4,5.\end{array}\right\} (2.7)$$

Dari data nilai ekspektasi ekspektasi *return* dan varian ekspektasi *return* untuk kelima sekuritas yang diberikan, didapat vektor ekspektasi ekspektasi *return* dan matrik kovarian berturut-turut

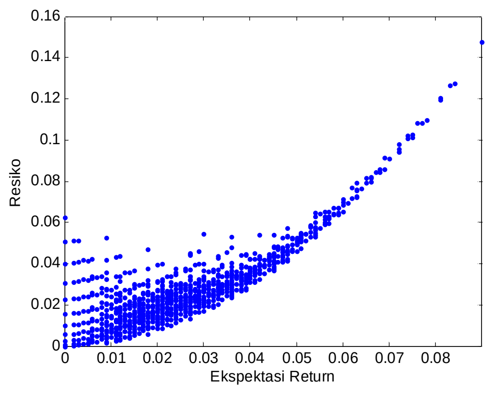
$$p = \begin{bmatrix}0.06 \\ 0.03 \\ 0.03 \\ 0.02 \\ 0.00\end{bmatrix}$$

dan

$$C_{ov} = \begin{bmatrix}0.0394 & 0.0338 & 0.0273 & 0.0249 & 0.0022 \\ 0.0338 & 0.0404 & 0.0140 & 0.0145 & 0.0012 \\ 0.0273 & 0.0140 & 0.0544 & 0.0103 & 0.0010 \\ 0.0249 & 0.0144 & 0.0103 & 0.0314 & 0.0014 \\ 0.0022 & 0.0012 & 0.0010 & 0.0014 & 0.0626\end{bmatrix}$$

2.4 Solusi

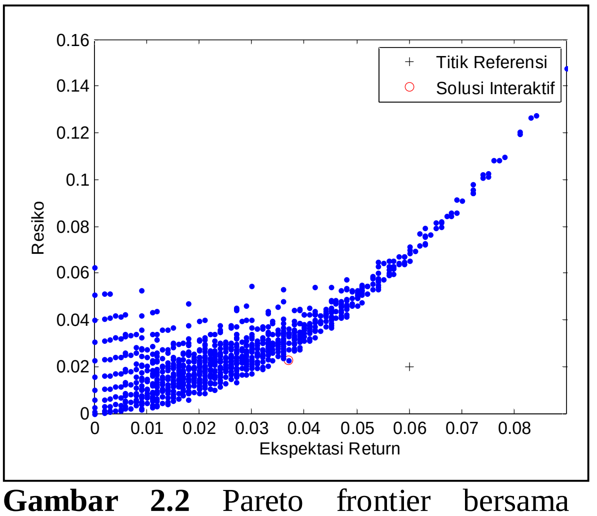
Jika nilai-nilai bobot x_1, x_2, x_3, x_4 dan x_5 dengan $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1$ dan $x_i \ge 0$, $\forall i=1,2,3,4,5$ ditentukan dan cukup bervariasi, maka kita dapat menggambarkan *Pareto frontier* yang memuat titik-titik solusi Pareto tertentu dari nilai ekspektasi ekspektasi *return* $M(x)=p'x$ dan resiko $\sigma^2=x'C_{ov}x$ yang bersesuaian dengan nilai-nilai bobot yang diberikan, tetapi tidak semua anggota himpunan solusi Pareto tergambarkan pada *Pareto frontier* tersebut. *Pareto frontier* tersebut diberikan oleh Gambar 1.



Gambar 2.1 *Pareto frontier* masalah optimisasi

Pada Gambar 2.1 dapat diamati bahwa secara umum, jika kita menginginkan nilai ekspektasi *return* yang lebih besar, maka nilai resikonya akan semakin besar pula, titik-titik tersebutlah yang disebut solusi

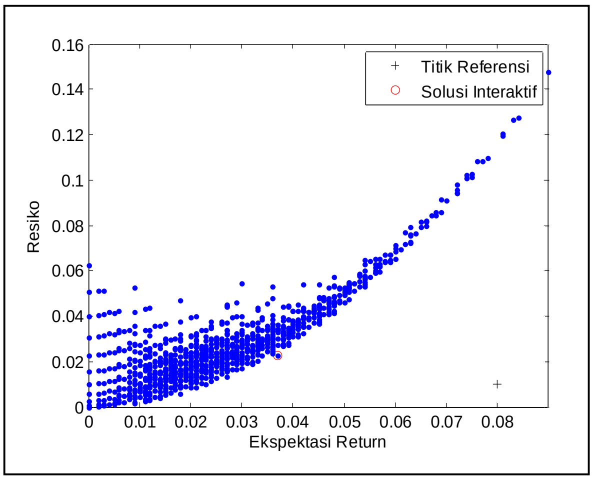
Pareto. Akan tetapi ada beberapa titik dimana untuk suatu nilai resikonya tertentu, masih ada nilai ekspektasi *return* yang lebih besar dengan nilai resiko yang sama, atau, untuk suatu nilai ekspektasi *return* tertentu, masih ada nilai resiko yang lebih kecil dengan nilai ekspektasi *return* yang sama, titik-titik tersebut disebut solusi Pareto lemah (*weak Pareto*). Jika diberikan suatu titik referensi oleh DM, pada kasus ini diberikan titik referensi 0,06 untuk nilai ekspektasi *return* dan 0,02 untuk resiko, yaitu $\hat{M}=0,06$ dan $\hat{\sigma}^2=0,02$ serta ditentukan nilai $\rho=0,8$. Misalkan solusi untuk vektor x dari **Error! Reference source not found.** adalah $x*$, maka masalah optimisasi **Error! Reference source not found.** memberikan solusi $x*=[0,5595 \quad 0,0000 \quad 0,0870 \quad 0,1382 \quad 0,2153]'$ yang merupakan nilai bobot untuk masing-masing sekuritas, yaitu 55,95% untuk , 0% untuk , 8,70% untuk , 13,82% untuk dan 21,53% untuk , yang akan memberikan ekspektasi ekspektasi *return* 3,89% dan resiko 2,37 %. Jika ditampilkan bersama dengan Pareto frontier, maka solusi tersebut dapat diilustrasikan oleh Gambar 2.



Gambar 2.2 Pareto frontier bersama dengan titik referensi dan solusi interaktif

Pada Gambar 2.2, dapat diamati bahwa dengan memberikan titik referensi 0,06 untuk ekspektasi *return* dan 0,02 untuk resiko, akan memberikan solusi interaktif yaitu 0,389 untuk ekspektasi *return* dan 0,237 untuk resiko. Nilai solusi interaktif tersebut adalah salah satu solusi Pareto. Sebetulnya, nilai ekspektasi *return* tersebut masih dapat lebih besar dari 0,389 akan tetapi akan memberikan resiko yang lebih besar pula. Sehingga jika DM menginginkan ekspektasi *return* yang lebih besar, maka resikonya-pun akan lebih besar. Inilah sebabnya solusi ini kita sebut solusi interaktif karena nilai solusi dipengaruhi oleh interaksi antara DM yang menentukan titik referensi dan *optimization solver*-nya. Pada penelitian sebelumnya di [14], solusi masalah alokasi aset optimal ini, bobot masing-masing sekuritas, adalah 21,92% untuk BMRI, 25,56% untuk UNVR, 14,46% untuk ASII, 27,88% untuk HMSP dan 20,18% untuk INDF yang memberikan ekspektasi *return* 2,77% dan resiko 1,93%. Jika kita bandingkan dengan solusi interaktif pada artikel ini, solusi interaktif memberikan nilai ekspektasi *return* yang lebih besar tetapi resikonya pun juga lebih besar. Untuk itu, kita tidak dapat mengatakan solusi mana yang lebih baik karena keputusan berada pada DM yang menentukan solusi mana yang akan dipakai. Akan tetapi solusi interaktif memberikan alternatif yang lebih bisa dimainkan oleh DM karena DM dapat menentukan titik referensi sesuai yang ia kehendaki.

Kami coba tentukan titik referensi lainnya untuk mendapatkan solusi interaktif baru. Gambar 3 menampilkan titik referensi, 0,08 untuk ekspektasi *return* dan 0,01 untuk resiko, dan solusi interaktif, 0,0370 untuk ekspektasi *return* dan 0,0228 untuk resiko, yang bersesuaian dengan bobot 50,89% untuk BMRI, 0,25% untuk UNVR, 10,05% untuk ASII, 16,84% untuk HMSP dan 21,97% untuk INDF.



Gambar 2.3 Pareto frontier bersama dengan titik referensi dan solusi interaktif kedua

Kita memang tidak dapat mengatakan bahwa solusi mana yang lebih baik, keputusan akan tetap di tangan DM, mana titik referensi yang akan ia pilih beserta solusi interaktifnya.

3. PENUTUP

Pada artikel ini, telah diberikan masalah alokasi aset optimal untuk lima sekuritas di Indonesia. Masalah tersebut diformulasikan menjadi masalah optimisasi multiobjektif yaitu memaksimumkan ekspektasi *return* dan meminimumkan resiko secara simultan. Penyelesaiannya dihitung menggunakan pendekatan pemrograman multiobjektif interaktif dimana *decision maker* menentukan titik referensi terlebih dahulu untuk masing-masing fungsi objektif, kemudian dicari solusinya menggunakan pemrograman multiobjektif yang diselesaikan menggunakan alat bantu hitung fungsi *fmincon* pada software MATLAB dengan menggunakan algoritma *active-set*. Solusi pemrograman multiobjektif interaktif tersebut memberikan solusi interaktif yang merupakan nilai bobot atau persentase aset yang harus dialokasikan untuk masing-masing sekuritas.

Pada penelitian selanjutnya, kami akan mendekati permasalahan tersebut menggunakan teori permainan dimana solusinya dapat didekati dengan solusi Nash-bargaining. Selanjutnya solusi Nash-bargaining tersebut dapat dibandingkan dengan solusi yang diperoleh dengan pendekatan pemrograman multiobjektif interaktif.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] H. Markowitz, (1952), Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7 : 77-91.

[2] M. C. Roberts, A. S. Dizier and J. Vaughan, (2012), *Multiobjective Optimization: Portofolio Optimization Based on Goal Programming Method, Department of Mathematics*, Louisiana State University.

[3] Y. C. Duan, (2007), *A Multi-objective Approach to Portfolio Optimization," Undergraduated Independent Research Project, Boston College*, Mathematics Department

[4] R. E. Steuer, Y. Qi and M. Hirschberger, (2005), Multiple Objectives in Portfolio Selection, *Journal of Financial Decision Making*, 11-26.

[5] R. Subbu, P. P. Bonissone, N. Eklund, S. Bollapragada and K. Chalermkraivuth, *Multiobjective Financial Portfolio Design: A Hybrid Evolutionary Approach*.

[6] T. Laukkanen, T. M. Tveit, V. Ojalehto, K. Miettinen and C. J. Fogelholm, (2012), Bilevel heat exchanger network synthesis with an interactive multi-objective optimization method, *Applied Thermal Engineering*, 48 : 301-316.

[7] S. Taras and A. Woinaroschy, (2012), An interactive multi-objective optimization framework for sustainable design of bioprocesses, *Computers and Chemical Engineering*, 43 : 10-22.

[8] J. Hakanen, K. Miettinen and K. Sahlstedt, (2011), Wastewater treatment: New insight provided by

interactive, *Decision Support Systems,* 15: 328-337.

[9] E. Bottani, R. Montanari, M. Rinaldi and G. Vignali, (2015), Modeling and multi-objective optimization of closed loop supply chains: A Case Study," *Computers & Industrial Engineering,* 87 : 328-342.

[10] C. L. Albert, F. Rubio and F. Valero, (2015), Improving productivity using a multi-objective optimization of robotic trajectory planning, *Journal of Business Research,* 68 : 1429-1431

[11] A. Fuentes, J. Ploteau and P. Glouannec, (2015), Predictive control with multiobjective optimization: Application to a aludge drying operation, *Computers and Chemical Engineering,* 78:70-78.

[12] M. Sakawa, I. Nishizaki and H. Katagiri, (2011), *Fuzzy Stochastic Multiobjective Programming,* London: Springer.

[13] A. Wierzbicki, "The use of reference objectives in multiobjective optimization, (1980), in *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Application,* Berlin, Springer-Verlag.

[14] N. C. N. Lie and Sutrisno, (2014), Aplikasi Metode Kuhn-Tucker untuk Menentukan Portofolio Optimal Dengan Meminimumkan Resiko, in *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma*, Yogyakarta, 2014.